4. Соловьева С.А. Обобщенный метод подобластей для одного класса интегральных уравнений третьего рода / С.А.Соловьева // Тез. докл. итог. научн. конф. филиала КГУ в г. Наб. Челны. – Наб. Челны, 2006. - С. 88-90.
5. Соловьева С.А. Обобщенный метод подобластей для одного класса интегральных уравнений третьего рода / С.А.Соловьева // Тр. Всерос. научн. конф. «Мат. моделирование и краевые задачи». - Самара, 2006. - Ч.3. – С. 209-212.
6. Габбасов Н.С. Обобщенный метод моментов для одного класса интегральных уравнений третьего рода / Н.С.Габбасов, С.А.Соловьева // Дифференц. уравнения. - 2006. - Т. 42. - № 10. - С. 1416-1423.
7. Габбасов Н.С. О сплайн - методе решения интегральных уравнений третьего рода / Н.С.Габбасов., С.А.Соловьева / Изв. вузов. Математика. - 2007. - № 3 - С. 3-11.

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Соловьева Светлана Александровна

О ПРЯМЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Специальность 01.01.01 - Математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань - 2007

Диссертация выполнена на кафедре математических методов в экономике филиала Казанского государственного университета имени В.И.Ульянова-Ленина в г. Набережные Челны.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук,
профессор Габбасов Назим Салихович

Официальные оппоненты:
— доктор физико-математических наук,
профессор Мухлисов Фоат Габдуллович
— доктор физико-математических наук,
профессор Плещинский Николай Борисович

Ведущая организация — Военно-воздушная инженерная академия
им. Н.Е.Жуковского, г. Москва

Защита состоится 31 мая 2007 г. в 14:30 на заседании диссертационного совета К 212.081.07 при Казанском государственном университете им. В.И.Ульянова-Ленина (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд.217)

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И.Лобачевского Казанского государственного университета

Автореферат разослан _____апреля 2007г.

Ученый секретарь
диссертационного ученого совета
кандидат физико-математических наук
доцент Ю.Р. Агачев

классическими методами по улучшению скорости сходимости приближенных решений.

4. Решена задача оптимизации прямых проекционных методов решения уравнений третьего рода, при этом разработаны оптимальные по порядку точности методы решения этих уравнений.

Автор выражает искреннюю благодарность и признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Габбасову Назиму Салиховичу за постановку задач и руководство работой. Автор также выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору Габдулхаеву Билсуру Габдулхаевичу за постоянное внимание к работе и участникам семинара кафедр математического моделирования и вычислительных методов и математической физики Московского государственного университета, особенно доктору физико-математических наук, профессору Лифанову Ивану Кузьмичу, за внимание к работе и полезные обсуждения.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Габбасов Н.С. К теории разрешимости интегральных уравнений третьего рода / Н.С.Габбасов, С.А.Соловьева // Тр. Всерос. научн. конф. «Мат. моделирование и краевые задачи». - Самара, 2005. - Ч.3. - С. 68-72.
2. Соловьева С.А. Элементы теории приближения в пространстве точечно «гладких» функций / С.А.Соловьева // Тез. докл. международной школы-конф. «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». - Казань, 2005.- С. 146 -147.
3. Соловьева С.А. Обобщенный метод коллокации для одного класса интегральных уравнений третьего рода / С.А.Соловьева // Тез. докл. мол. научн. школы-конф. «Лобачевские чтения - 2005», Казань, 2005. - С. 144-147.

«полиномиальных» проекционных методов, а обобщенные сплайн-методы - среди всех прямых проекционных методов решения УТР. Приведем один из установленных результатов.

Следуя Б.Г.Габдулхаеву, через $V_N(\Phi)$ обозначим оптимальную оценку погрешности всевозможных проекционных методов решения данного операторного уравнения на классе Φ. Рассмотрим оптимизацию на классе однозначно разрешимых в X уравнений вида (1) в случае, когда исходные данные принадлежат семейству $YH_\omega^r \equiv \{g \in Y | Tg \in H_\omega^r\}$ $(r+1 \in N)$. Пусть $\Im_n^{(2)} = \{\Gamma_n\}$ - совокупность всех «полиномиальных» операторов $\Gamma_n : Y \to Y_n$, удовлетворяющих условию $\| \Gamma_n \| n^{-r}\omega(n^{-1}) = o(1) \quad (n \to \infty)$, отображающих Y на подпространство Y_n размерности $n+m$.

Т е о р е м а 3.3.1. *Пусть* $\Phi = YH_\omega^r$.. *Тогда*

$$V_N(\Phi) \text{ фπ } N^{-r}\omega(N^{-1}) \ln N \quad (N = n+m)$$

и этот оптимальный порядок реализует предложенный выше ОМП.

Заключение. В работе получены следующие основные результаты:

1. Установлены фредгольмовость и достаточные условия непрерывной обратимости оператора уравнения третьего рода с коэффициентом, имеющим на отрезке интегрирования конечное множество нулей любого степенного порядка.

2. Предложены и обоснованы вычислительные алгоритмы на основе классических прямых методов решения исследуемых уравнений в пространстве обобщенных функций.

3. Построены и обоснованы специальные «полиномиальные» и «сплайновые» методы решения изучаемых уравнений, имеющие преимущество перед

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена методам решения линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода (УТР) в классе обобщенных функций.

Актуальность темы. Теория интегральных уравнений была и остается одной из центральных областей математики и ее приложений. К настоящему времени наиболее полные результаты получены по решению регулярных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра 1-го и 2-го родов, сингулярных интегральных уравнений. Определенные итоги установленных результатов и обширную библиографию можно найти в справочных пособиях А.Ф.Верланя и В.С.Сизикова, В.В.Иванова, в специальных обзорных работах Б.Г.Габдулхаева, З.Пресдорфа, И.К.Лифанова и Е.Е.Тыртышникова, а также в монографиях С.М.Белоцерковского и И.К.Лифанова, Г.М.Вайникко, В.Вольтерра, Б.Г.Габдулхаева, Ф.Д.Гахова, В.В.Иванова, Л.В.Канторовича и Г.П.Акилова, Л.В.Канторовича и В.И.Крылова, М.Л.Краснова, И.К.Лифанова, А.Ю.Лучки и Т.Ф.Лучка, С.Г.Михлина и Х.Л.Смолицкого, Н.И.Мусхелишвили, З.Пресдорфа, И.И.Привалова, Ф.Дж.Трикоми и др. В то же время ряд задач теорий упругости, переноса нейтронов, рассеяния частиц, а также теорий уравнений смешанного типа и сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом приводят к УТР. Обнаружилось, что часто естественными классами решений ряда прикладных задач, приводящихся к УТР, являются специальные пространства обобщенных функций типа D или типа V. Под D (соответственно V) понимается класс обобщенных функций, построенных при помощи функционала «дельта-функция Дирака» (соответственно «конечная часть интеграла по Адамару»). Впервые в пространстве обобщенных функций УТР исследовалось Г.Р.Бартом и Р.Л.Варноком. Их исследования были продолжены и развиты в работах В.С.Рогожина и С.Н.Расламбекова, Г.Р.Барта, Н.Сукаванама, К.Б.Бараталиева, С.Н.Расламбекова. Все эти работы посвящены теории Нетера для соответствующих УТР в классах непрерывных, интегрируемых и обобщенных функций. Подробный обзор имеющихся результатов и библиографию можно найти в монографии Н.С.Габбасова (2006 г.). Исследуемые уравнения точно решаются лишь в очень редких частных случаях, поэтому разработка теоретически обоснованных эффективных методов их приближенного решения в пространствах обобщенных функций является актуальной задачей. Первые результаты в этом направлении получены в работах Н.С.Габбасова, который исследовал УТР с коэффициентом, имеющим на отрезке интегрирования конечное множество нулей любого степенного порядка. Им были предложены и обоснованы как классические, так и специальные прямые методы решения этих уравнений. При этом по решению УТР в пространстве типа D получены в определенном смысле окончательные результаты, а в классе типа V подробные исследования проведены в частных случаях в зависимости от характера нулей коэффициента уравнения. В статье В.А.Золотаревского (2003г.) некоторые результаты Н.С.Габбасова (1990г.) в частном случае пространства типа D перенесены на УТР в комплексной плоскости.

Таким образом, в обсуждаемой области все еще остается много нерешенных задач. В частности, вопрос о построении и обосновании методов приближенного решения общих УТР в пространстве типа V, по существу, до сих пор оставался открытым. Данная диссертационная работа в определенной степени восполняет этот пробел.

Цель работы - построение теории разрешимости УТР с коэффициентом, имеющим на отрезке интегрирования конечное множество нулей любого степенного порядка, в пространстве типа V и теоретическое обоснование методов их приближенного решения в данном пространстве.

В диссертации под теоретическим обоснованием понимается, следуя Л.В.Канторовичу, следующий круг задач: а) доказательство существования и единственности решения аппроксимирующих уравнений; б) доказательство схо-

Для вычислительной схемы (1), (3), (5) верна следующая

Теорема 3.1.3. *Пусть* $\ker A = \{0\}$, *а* $h(t,s) \equiv (T_s T_t K)(t,s)$, $g_{ji}(t) \equiv (T_t K)_s^{\{i\}}(t,t_j)$ $(i = \overline{m_j - 1}, j = \overline{1, q+2})$, $(Ty)(t) \in DL$. *Тогда при* $n \geq n_1$ *приближенные решения* $x_n^*(t)$, *определяемые из* (3), (5)*, существуют, единственны и сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *УТР* (*1*) *с быстротой*

$$\| x^* - x_n^* \|_X = O\left\{ \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} E_{n-1}(g_{ji}) + E_{n-1}(Ty) \right] \ln n \right\}.$$

Следствие. *Если* $h(t,s)\,(\text{по } t), g_{ji}(t), (Ty)(t) \in H_\alpha^r$ $(0 < \alpha \leq 1,\ r+1 \in N)$, *то в условиях теоремы 3.1.3 справедлива оценка*

$$\| x_n^* - x^* \| = O(n^{-r-\alpha} \ln n).$$

При $p_1 = p_2 = m_j = 0$ $(j = \overline{1, q})$ рассматриваемое УТР превращается в уравнение второго рода в *C*, а прямой проекционный метод (3), (5) - в известный метод моментов, причем $Ty \equiv y$, $h \equiv K$. Следовательно, теорема 3.1.3 содержит в себе известные результаты по обоснованию метода моментов для уравнения второго рода.

Аналогичные результаты получены для обобщенных методов коллокации и подобластей. Основные результаты сформулированы в теоремах 3.1.1 и 3.1.5.

В §2 предлагаются и обосновываются специальные «сплайновые» методы решения УТР в пространстве *X*, являющиеся в некотором смысле обобщением известных методов сплайн-коллокации, сплайн-подобластей и метода подобластей на базе параболических сплайнов и обладающие существенным преимуществом перед ними в смысле улучшения скорости сходимости приближенных решений УТР (1).

В §3 устанавливается, что предложенные в диссертации специальные методы моментов, коллокации и подобластей оптимальны по порядку среди всех

$g_{ji}(t)\equiv (T_tK)_s^{\{i\}}(t,t_j)$ $(i=\overline{m_j-1}, j=\overline{1,q+2})$, $(Ty)(t)\in C^{(2m)}(I)$, *причем* $h^{(2m)}(t,s)$ (*по t равномерно относительно s*), $g_{ji}^{(2m)}(t)$ *и* $(Ty)^{(2m)}(t)\in DL$. *Тогда при достаточно больших* $n\in N$ *приближенные решения, определяемые из* (3),(4)*, существуют, единственны и сходятся по норме пространства X к точному решению* $x^*(t)$ *УТР* (*1*) *со скоростью*

$$\| x^* - x_n^* \| = O\left\{\left[E_{n-1}^t(h)+\sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1}E_{n-1}(g_{ji})+E_{n-1}(Ty)\right]n^{2m}\ln n\right\}.$$

Результаты §4 второй главы показывают, что при решении УТР на основе классических приближенных методов сходимость приближенных решений достигается путем ограничения исходных данных жесткими требованиями гладкости. Это означает, что известные методы приводят к «плохой» скорости сходимости (в частности, по сравнению со случаем уравнений второго рода). В этой связи в **третьей главе** строятся и обосновываются специальные прямые методы, имеющие преимущество перед классическими методами по улучшению скорости сходимости приближенных решений.

В §1 предлагаются и обосновываются специальные «полиномиальные» методы.

Пусть имеем уравнение (1), в котором исходные данные K и y таковы, что выполняются условия (2) и $y\in Y$. Конечномерное приближение к решению $x^*=A^{-1}y$ ищется в виде агрегата (3), где неизвестные коэффициенты $c_k\equiv c_k^{(n)}$ $(k=\overline{0,n-1})$, c_{ji} $(i=\overline{0,m_j-1},\ \ j=\overline{1,q+2})$ согласно обобщенному методу моментов (ОММ) находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}&\int_0^1\rho(t)(TAx_n-Ty)(t)\widetilde{T}_k(t)\,dt=0 \quad (k=\overline{0,n-1});\\ &(Ax_n-y)^{\{i\}}(t_j)=0 \quad (i=\overline{0,m_j-1},\ \ j=\overline{1,q+2}),\end{aligned} \tag{5}$$

димости приближенных решений к точному и определение скорости сходимости; в) установление эффективных оценок погрешности приближенного решения, учитывающих структурные свойства исходных данных; г) исследование устойчивости и обусловленности аппроксимирующих уравнений.

Методика исследований. При выводе и обосновании полученных в диссертации результатов используются теория операторов Нетера, теория приближения функций, общая теория приближенных методов анализа и методы функционального анализа. При этом подходы и рассуждения, применяемые в работе, основываются на существенном использовании результатов и методики исследования, предложенных в упомянутой выше монографии научного руководителя.

Научная новизна. В диссертации изучены свойства основных пространств, используемых в исследованиях. Для УТР при общих предположениях относительно нулей коэффициента построена теория разрешимости в пространстве типа V (фредгольмовость, алгоритм отыскания точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора третьего рода). На базе этих результатов дано теоретическое обоснование вычислительных схем на основе ряда классических прямых методов, предложены и обоснованы специальные прямые методы решения УТР в классе типа V. Установлена оптимальность по порядку точности построенных «полиномиальных» и «сплайновых» методов решения изучаемых уравнений.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть применены при дальнейшем развитии теории интегральных уравнений в пространствах обобщенных функций, а также при решении конкретных прикладных задач, сводящихся к решению такого рода уравнений.

Апробация работы. Отдельные результаты диссертации сообщались на Всероссийских научных конференциях «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2005, 2006 гг.), на международной Казанской летней школе - конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2005 г.), на молодежной школе - конференции «Лобачевские чтения - 2005» (Казань), на итоговых научных конференциях Казанского университета и филиала Казанского университета в г. Набережные Челны (2006, 2007). Основные результаты диссертации в целом докладывались и обсуждались в Набережночелнинском государственном педагогическом институте на семинаре кафедры математического анализа (2006 г., руководитель - профессор Н.С.Габбасов), на семинаре кафедр математической физики и вычислительных технологий и моделирования факультета ВМиК МГУ (2006 г., руководители - проф. И.К. Лифанов и проф. Е.В. Захаров), на семинаре кафедры теории функций и приближений (2007 г., руководитель - проф. Б.Г.Габдулхаев), на совместном заседании кафедр математических методов в экономике и математики и информатики филиала КГУ в г. Набережные. Челны (2007 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах, список которых приведен в конце автореферата. В совместных работах научному руководителю принадлежат постановка задач и определение общего метода исследования, соответствующие результаты получены лично диссертантом.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 111 страницах машинописного текста и состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 73 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Введение включает в себя обоснование актуальности темы исследования, обзор работ по теме диссертации и краткое изложение полученных автором результатов.

Тогда уравнение (*1*) *при любом* $y \in Y$ *имеет единственное обобщенное решение*

$$x^*(t) = (RTy)(t) - \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1}\alpha^*_{ji}(RTQ_{ji})(t) + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1}\alpha^*_{ji}t^{\mu_1}(1-t)^{\mu_2}(t-t_j)^{-i-1}.$$

Следствие. *При выполнении условий теоремы 2.2.1 оператор третьего рода* $A: X \to Y$ *непрерывно обратим.*

§ 3 содержит постановки задач обоснования и оптимизации прямых проекционных методов решения линейных операторных уравнений и ряд вспомогательных результатов из общей теории приближенных методов.

В §4 дается обоснование вычислительных схем на основе классических методов моментов, коллокации и подобластей для приближенного решения УТР (1) в пространстве типа V в смысле общей теории приближенных методов функционального анализа, предложенной Б.Г.Габдулхаевым.

Пусть дано УТР (1), в котором ядро K удовлетворяет условиям (2), $y \in Y$. Приближенное решение уравнения (1) ищется в виде

$$x_n(t) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} c_{ji} t^{\mu_1}(1-t)^{\mu_2}(t-t_j)^{-i-1}, \qquad (3)$$

где неизвестные коэффициенты $c_k \equiv c_k^{(n)}$ $(k=\overline{0,n-1})$, c_{ji} $(i=\overline{0,m_j-1},\ j=\overline{1,q+2})$ согласно методу моментов находятся из условий:

$$\int_0^1 \rho(t)(Ax_n - y)(t)\widetilde{T}_k(t)\,dt = 0 \quad (k=\overline{0,n+m-1}), \qquad (4)$$

где $\{\widetilde{T}_k\}$ - полная ортонормированная на I по весу $\rho(t) = (t-t^2)^{-1/2}/2$ система смещенных полиномов Чебышева первого рода.

Для вычислительной схемы (1), (3)-(4) верна следующая

Теорема 2.4.3. *Пусть уравнение* (*1*) *однозначно разрешимо в пространстве* Y *при любой правой части* $y \in Y$*; а функции* $h(t,s) \equiv (T_sT_tK)(t,s)$ (*по* t), где $(Ux)(t) \equiv x(t)u(t) \equiv x(t)t^{p_1}(1-t)^{p_2}\prod_{j=1}^{q}(t-t_j)^{m_j}$, $(Kx)(t) \equiv \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$, $t \in I$;

$p_1, p_2 \in R^+$, $t_j \in (0,1)$, $m_j \in N$ $(j=\overline{1,q})$; K и y - известные непрерывные функции, а x - искомый элемент. Устанавливается фредгольмовость оператора A при выполнении условий:

$$K \in C^{\{p_1,p_2;\overline{m}\}}(I^2);\ K_s^{\{i\}}(t,t_j),\ K_t^{\{i\}}(t_j,s) \in Y\ \ (i=\overline{0,m_j-1},\ j=\overline{1,q+2}), \qquad (2)$$

даются необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородного уравнения в виде требований ортогональности правой части всем решениям соответствующего однородного союзного уравнения.

В дальнейшем при обосновании приближенных методов решения операторных уравнений существенную роль играет непрерывная обратимость соответствующих операторов. В связи с этим в §2 даются достаточные условия непрерывной обратимости оператора третьего рода, определенного соотношением (1), и указывается метод отыскания точного решения УТР в пространстве X обобщенных функций.

Теорема 2.2.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) ядро удовлетворяет требованиям (2), $y \in Y$;

2) число $\lambda = -1$ *не является собственным значением ядра* $T_t K$;

3) система

$$\sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1}\alpha_{ji}\,(\boldsymbol{P}\quad Q_{ji})^{\{l\}}(t_k) = (\boldsymbol{P}\quad y)^{\{l\}}(t_k) \qquad (l=\overline{0,m_k-1},\quad k=\overline{1,q+2}),$$

где $\boldsymbol{P} \equiv E - KRT$, R *- разрешающий оператор ядра* $T_t K$,

$$Q_{ji}(t) \equiv (t-t_j)^{m_j-i-1}r_j(t) + \int_0^1 s^{\mu_1}(1-s)^{\mu_2}K(t,s)(s-t_j)^{-i-1}ds, \qquad r_j(t) \equiv \prod_{j\neq k=1}^{q+2}(t-t_k)^{m_k},$$

имеет единственное решение $\{\alpha^*_{ji}\}_{i=0;\ j=1}^{m_j-1;\ q+2}$.

Первая глава посвящена изучению свойств основных пространств, необходимых в дальнейших исследованиях и построению специальной теории приближения в этих пространствах.

В §1, следуя З.Пресдорфу и В.Б.Дыбину, вводится класс $Y \equiv C\{p_1; p_2; \overline{m}, \overline{\tau}\}$ точечно «гладких» функций; изучаются некоторые его свойства. В частности, доказаны теоремы о вложении банаховых пространств.

Пусть $C \equiv C(I)$ - пространство непрерывных на $I \equiv [0,1]$ функций с обычной max - нормой и $m \in N$. Через $C_{t_0}^{\{m\}} \equiv C\{m;\, t_0\}$ обозначается класс функций $g \in C$, имеющих в точке $t_0 \in (0,1)$ тейлоровскую производную $g^{\{m\}}(t_0)$ порядка m.

Пусть $t_1, t_2, ..., t_q$ - произвольно фиксированные попарно различные точки интервала (0,1). Каждой точке t_j ставится в соответствие некоторое число $m_j \in N$ $(j=\overline{1,q})$. Далее, вводится в рассмотрение векторное пространство

$$C\{\overline{m};\overline{\tau}\} \equiv C_{\overline{\tau}}^{\{\overline{m}\}}(I) \equiv \prod_{j=1}^{q} C\{m_j; t_j\},$$

где $\overline{m} \equiv (m_1, m_2, ..., m_q)$, $\overline{\tau} \equiv (t_1, t_2, ..., t_q)$ - конечномерные наборы соответствующих величин. Пусть $p_1 \in R^+$. Через $C\{p_1; 0\}$ обозначается пространство функций $g \in C$, имеющих правые тейлоровские производные $g^{\{i\}}(0)$ $(i=\overline{1,[p_1]})$ в точке $t=0$, причем в случае $p_1 \neq [p_1]$ ($[\cdot]$ - целая часть) существует конечный предел

$$\lim_{t\to 0+}\left\{\left[g(t) - \sum_{i=0}^{[p_1]} g^{\{i\}}(0)\ t^i/i!\right]t^{-p_1}\right\}.$$

Класс $C\{p_2;1\}$ $(p_2 \in R^+)$ вводится аналогично. Наконец, образуется основное векторное пространство

$$Y \equiv C\{p_1, p_2; \overline{m}, \overline{\tau}\} \equiv C\{\overline{m}, \overline{\tau}\} \times C\{p_1; 0\} \times C\{p_2; 1\}$$

(естественно считается, что $C\{0;0,\overline{0},\overline{\tau}\}\equiv C$). По норме

$$\| g \|_Y \equiv \| Tg \|_C + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j-1} \left| g^{\{i\}}(t_j) \right|$$

пространство Y полно. Здесь

$$(Tg)(t) \equiv \left[g(t) - \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j-1} g^{\{i\}}(t_j)\ R_{ji}(t) \right] / \ u(t) \equiv \Phi(t),$$

$u(t) \equiv t^{p_1}(1-t)^{p_2} \prod_{j=1}^{q} (t-t_j)^{m_j}$, $\Phi \in C(I)$, $\Phi(t_j) \equiv \lim_{t \to t_j} \Phi(t)$ $\quad (j=\overline{1,q+2})$; $\quad t_j \in (0,1)$ $(j=\overline{1,q})$, $\quad t_{q+1} \equiv 0$, $\quad t_{q+2} \equiv 1$, $\quad R_{ji}$ - фундаментальные полиномы Эрмита степени $m-1$ по узлам $\{t_j\}_1^{q+2}$, $m \equiv \sum_{j=1}^{q+2} m_j, m_{q+1} \equiv \lambda_1 + 1,\ m_{q+2} \equiv \lambda_2 + 1,\quad \lambda_k \equiv \lambda(p_k) \quad (k=\overline{1,2}),$ $\lambda(p) \equiv [p] - (1 + sign([p]-p))$.

В §2 рассматривается пространство $X \equiv V\{p_1; p_2; \overline{m}, \overline{\tau}\}$, устанавливаются некоторые его свойства, в частности, доказывается, что пространства X и Y являются взаимно союзными, а также приводится ряд необходимых определений и вспомогательных фактов.

Обозначим через X семейство обобщенных функций $x(t)$, определенных на основном пространстве Y, вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{ji}\ F.P.t^{\mu_1}(1-t)^{\mu_2}(t-t_j)^{-i-1},$$

где $t \in I$, $\quad z \in C$, $\quad \mu_k \equiv \lambda_k - p_k + 1$, $\quad c_{ji} \in R-$произвольные постоянные, а знак «$F.P.$» указывает на конечную часть интеграла по Адамару.

В §3 строятся элементы специальной теории приближения в пространствах X и Y. Доказываются аналоги теоремы Вейерштрасса, исследуются вопросы о наилучшем «полиномиальном» приближении функций из X и Y, поперечники по Колмогорову множеств в X и Y.

Пусть $H_{n-1} \equiv span\{t^i\}_0^{n-1}$, $\qquad H_{n+m}^{F.P.} \equiv H_{n-1} \oplus span\left\{ F.P. \frac{t^{\mu_1}(1-t)^{\mu_2}}{(t-t_j)^{i+1}} \right\}_{i=0;\ j=1}^{m_j-1;\ q+2}$,

$E_{n-1}(g)$ - наилучшее равномерное приближение функции $g(t)$ полиномами из H_{n-1},

$$E_{n+m}^{F.P.}(x) \equiv \inf_{x_n \in H_{n+m}^{F.P}} \| x - x_n \|_X \qquad (x \in X),$$

а $d_n(Q,\aleph)$ - n-й поперечник по Колмогорову множества Q в пространстве $\aleph$. Имеет место

Теорема 1.3.5. Для произвольной функции $x \in X$ при любом $n \in N$ существует элемент $x_n \in H_{n+m}^{F.P.}$ наилучшего приближения, причем

$$E_{n+m}^{F.P.}(x) = E_{n-1}(TUx).$$

Теорема 1.3.6. Для всякого множества $Q \subset X$ справедливо соотношение

$$d_{n+m}(Q,X) = d_n(TU(Q),C) \quad (n \in N).$$

В § 4 рассматривается вопрос о приближении функций из Y при помощи специальных линейных «полиномиальных» операторов, приводятся их аппроксимативные свойства.

Во второй главе излагаются результаты по теории разрешимости уравнений Фредгольма третьего рода с коэффициентом, имеющим на отрезке интегрирования конечное множество нулей любого степенного порядка, в пространстве типа V. Кроме того, на основе ряда классических прямых проекционных методов разрабатываются соответствующие вычислительные схемы и дается их теоретическое обоснование.

§1 посвящен исследованию разрешимости уравнений третьего рода

$$(Ax)(t) \equiv (Ux)(t) + (Kx)(t) = y(t), \tag{1}$$